

Correction Feuille Exercice 4

*Exprimer des évènements en fonction d'intersection, d'union et du complémentaire*

**Exercice 9**

On lance 3 dés à 6 faces et on note les résultats obtenus. L'univers est  $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^3$ . Soit  $A_i$  l'évènement "On obtient un 6 au  $i^{\text{ème}}$  tirage" pour  $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$ .

1.  $B_1 = A_1$
2.  $B_2 = \overline{A_1} \cap A_2$
3.  $B_3 = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3$
4.  $C_3 = A_1 \cap A_2 \cap A_3$
5.  $C_1 = (A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) \cup (\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3}) \cup (\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3)$
6.  $C_0 = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$

**Exercice 10 (\*)**

On considère une urne  $U$  contenant deux boules blanches et une boule noire indiscernable au toucher ainsi qu'une urne  $V$  contenant une boule blanche et trois boules noires, elles aussi indiscernable au toucher. On note les évènements  $U$  : "On tire une boule dans l'urne  $U$ " et  $N$  : "On tire une boule noire". Exprimez les évènements suivants :

1.  $A$  : "On tire une boule dans l'urne  $V$ "  $A = \overline{U}$
2.  $B$  : "On tire une boule noire dans l'urne  $U$  ou une boule noire dans l'urne  $V$ ". On a

$$B = (N \cap U) \cup (N \cap V)$$

3. L'évènement  $B$  est le même que l'évènement  $N$ . Ainsi

$$N = (N \cap U) \cup (N \cap V)$$

**Exercice 11 (\*\*)**

On effectue  $n$  tirages dans une urne qui contient des boules rouges et vertes. On note  $R_i$  l'évènement "On tire une boule rouge au  $i^{\text{ème}}$  tirage." Déterminer en fonction des évènements  $R_i$ , les évènements

1.  $A = R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_n = \bigcup_{k=1}^n R_k.$
2.  $B = R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n = \bigcap_{k=1}^n R_k.$

*Déterminer la probabilité d'une union finie.*

**Exercice 12**

On lance 3 fois un dé à 4 faces et on note les évènements  $A_i$  : "On obtient 4 sur le dé au  $i^{\text{ème}}$  lancer". On définit enfin les évènements  $B_i$  : "On obtient au moins un 4 lors des  $i$  premiers lancers". On a  $B_1 = A_1$  donc

$$P(B_1) = P(A_1) = \frac{1}{4}.$$

On a  $B_2 = A_1 \cup A_2$ . Les évènements  $A_1$  et  $A_2$  ne sont pas disjoints (mais ils sont indépendants) donc on utilise le crible de Poincaré :

$$\begin{aligned} P(B_2) &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{7}{16} \end{aligned}$$

Enfin,  $B_3 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ . Les évènements  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$  ne sont pas disjoints (mais ils sont indépendants) donc on utilise le crible de Poincaré :

$$\begin{aligned} P(B_3) &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{3}{16} + \frac{1}{64} \\ &= \frac{46}{64} = \frac{23}{32} \end{aligned}$$

### Exercice 13 (\*)

On considère l'expérience aléatoire consistant à effectuer  $n$  tirages avec remise (avec  $n \geq 4$ ) dans une urne contenant 1 boule noire et 2 boules rouges.

- Afin de calculer la probabilité de l'évènement  $C$ , on introduit les évènements  $N_k$  (resp.  $R_k$ ) : "On tire une boule noire (resp. rouge) au  $k^{\text{ème}}$  tirage". Alors on a  $C = (N_1 \cap N_n) \cup (R_1 \cap R_n)$ . En appliquant les formules du cours (on rappelle que les évènements  $R_1$  et  $R_n$  sont indépendants, les évènements  $N_1$  et  $N_n$  sont indépendants et les évènements  $(N_1 \cap N_n)$  et  $(R_1 \cap R_n)$  sont incompatibles.

$$\begin{aligned} P(C) &= P((N_1 \cap N_n) \cup (R_1 \cap R_n)) \\ &= P(N_1 \cap N_n) + P(R_1 \cap R_n) \\ &= P(N_1) \times P(N_n) + P(R_1) \times P(R_n) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{5}{9} \end{aligned}$$

- On considère les évènements  $D$  : "Les tirages 1 et 2 amènent chacun une boule noire", c'est à dire  $D = N_1 \cap N_2$ ,  $F$  : "Les tirages 2 et 3 amènent chacun une boule noire", c'est à dire  $F = N_2 \cap N_3$ , et  $G$  : "Les tirages 3 et 4 amènent chacun une boule rouge", c'est à dire  $G = R_3 \cap R_4$ . On cherche alors la probabilité de l'évènement  $D \cup F \cup G$ . Les évènements  $D$ ,  $F$  et  $G$  ne sont pas incompatibles. On utilise alors le crible de Poincaré sachant que

$$\begin{aligned} P(D) &= P(N_1 \cap N_2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \\ P(F) &= P(N_2 \cap N_3) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \\ P(G) &= P(R_3 \cap R_4) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9} \\ P(D \cap F) &= P(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27} \\ P(D \cap G) &= P(N_1 \cap N_2 \cap R_3 \cap R_4) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{81} \end{aligned}$$

Enfin  $P(G \cap F) = P(N_2 \cap N_3 \cap R_3 \cap R_4) = P(\emptyset) = 0$  et de même  $P(D \cap F \cap G) = 0$ . On a alors

$$\begin{aligned} P(D \cup F \cup G) &= P(D) + P(F) + P(G) - P(D \cap F) - P(D \cap G) - P(F \cap G) + P(D \cap F \cap G) \\ &= \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} - \frac{1}{27} - \frac{4}{81} - 0 + 0 \\ &= \frac{54}{81} - \frac{7}{81} \\ &= \frac{47}{81} \end{aligned}$$

### Exercice 14 (\*\*)

On considère des événements  $(A_i)_{i \in \llbracket 0; n \rrbracket}$  formant un système complet d'évènement et tel que

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad P(A_i) = \frac{i}{n(n+1)}.$$

Les événements  $(A_i)_{i \in \llbracket 0; n \rrbracket}$  formant un système complet d'évènement, alors

$$P(A_0) + P(A_1) + \dots + P(A_n) = 1.$$

et donc

$$\begin{aligned} P(A_0) &= 1 - (P(A_1) + \dots + P(A_n)) \\ &= 1 - \left( \frac{1}{n(n+1)} + \frac{2}{n(n+1)} + \dots + \frac{n}{n(n+1)} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n(n+1)}(1 + 2 + \dots + n) \\ &= 1 - \frac{1}{n(n+1)} \times \frac{n(n+1)}{2} \\ &= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

 Déterminer la probabilité d'une intersection finie.

### Exercice 15

Dans une urne, il y a 8 boules vertes et 12 boules rouge. On tire 2 boules l'une après l'autre. On considère l'évènement  $V_k$  : "On tire la boule verte au  $k^{\text{ème}}$  tirage"

1. On remet la boule tirée dans l'urne. Les événements  $V_1$  et  $V_2$  sont donc indépendants et

$$P(V_1 \cap V_2) = P(V_1) \times P(V_2) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}.$$

2. On ne remet pas la boule tirée dans l'urne. Cette fois ci les deux événements ne sont pas indépendants donc

$$P(V_1 \cap V_2) = P(V_1) \times P_{V_1}(V_2) = \frac{2}{5} \times \frac{7}{19} = \frac{14}{95}.$$

(En effet, si on a tiré une boule verte au premier tirage alors il reste 7 boules vertes et 12 boules rouges dans l'urne.)

**Exercice 16 (\*)**

On considère l'expérience aléatoire consistant à effectuer 3 tirages dans une urne contenant 3 boules noires et 5 boules rouges. On suppose que les tirages se font sans remise. On introduit alors les événements  $N_k$  : "On a pioché une boule noire au  $k^{\text{ème}}$  tirage" et  $R_k$  : "On a pioché une boule rouge au  $k^{\text{ème}}$ ". On compare alors  $P(R_1 \cap N_2 \cap R_3)$  et  $P(N_1 \cap R_2 \cap N_3)$ . On a d'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} P(R_1 \cap N_2 \cap R_3) &= P(R_1) \times P_{R_1}(N_2) \times P_{R_1 \cap N_2}(R_3) \\ &= \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} \\ &= \frac{5}{4 \times 2} \times \frac{3}{7} \times \frac{4}{3 \times 2} \\ &= \frac{5}{28} \end{aligned}$$

D'un autre côté,

$$\begin{aligned} P(N_1 \cap R_2 \cap N_3) &= P(N_1) \times P_{N_1}(R_2) \times P_{N_1 \cap R_2}(N_3) \\ &= \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} \times \frac{2}{6} \\ &= \frac{3}{4 \times 2} \times \frac{5}{7} \times \frac{2}{3 \times 2} \\ &= \frac{5}{56} \end{aligned}$$

On a donc deux fois plus de chances d'obtenir R-N-R que N-R-N

**Exercice 17 (\*\*)**

On dispose de deux urnes. L'urne U contient une boule blanche et quatre boules noires ; l'urne V contient trois boules blanches et deux boules noires. Dans l'une des urnes choisie au hasard, on effectue une série de tirages d'une boule avec remise (tous les tirages ont lieu dans la même urne). Soit  $A_i$  l'évènement "la  $i$ -ème boule tirée est blanche".

1. On note l'évènement  $U$  (resp.  $V$ ) : "On tire les boules dans l'urne  $U$  (resp. dans l'urne  $V$ )". Les évènements  $U$  et  $V$  forment donc un système complet d'évènement. En appliquant la formule des probabilité totale, on a

$$\begin{aligned} P(A_1) &= P(U) \times P_U(A_1) + P(V) \times P_V(A_1) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \\ &= \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

De la même façon, (les tirages s'effectuant avec Remise), on a

$$P(A_2) = \frac{2}{5}$$

Pour calculer la probabilité de  $A_1 \cap A_2$ , on utilise également le système complet d'évènements  $(U, V)$ .

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2) &= P(U) \times P_U(A_1 \cap A_2) + P(V) \times P_V(A_1 \cap A_2) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{10}{50} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Or, on a également

$$P(A_1) \times P(A_2) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$$

Les évènements  $A_1$  et  $A_2$  ne sont pas indépendants.

2. On ne va pas utiliser directement la formule de l'indépendance. Il faut d'abord passer par le système complet d'évènements  $(U, V)$  et la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) &= P(U)P_U(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) + P(V)P_V(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} \times \dots \times \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \times \dots \times \frac{3}{5} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{5}\right)^n \end{aligned}$$

3. On cherche la probabilité  $P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$ . En appliquant la formule du cours

$$\begin{aligned} P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n) &= \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap A_n)}{P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{5}\right)^n}{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n (1 + 3^n)}{\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} (1 + 3^{n-1})} \\ &= \frac{1}{5} \times \frac{1 + 3^n}{1 + 3^{n-1}} \end{aligned}$$

4. On cherche la probabilité  $P_{A_1 \cap \dots \cap A_n}(U)$ . D'après la formule de Bayes,

$$\begin{aligned} P_{A_1 \cap \dots \cap A_n}(U) &= \frac{P(U)}{P(A_1 \cap \dots \cap A_n)} P_U(A_1 \cap \dots \cap A_n) \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{5}\right)^n} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n \\ &= \frac{1}{1 + 3^n} \end{aligned}$$

*Déterminer une probabilité conditionnelle. Utiliser la formule des probabilités totales.*

### Exercice 18

Dans une classe d'ECE, On a  $1/3$  de garçons pour  $2/3$  de filles. Au dernier SIGMA, 2 garçons sur 5 ont au dessus de la moyenne alors que 7 filles sur 10 ont obtenus moins que la moyenne. On choisit un élève au hasard.

1. On introduit les évènements  $F$  : "L'élève est une Fille" et  $A$  : "L'élève a obtenu plus que la moyenne". On cherche alors la probabilité (donnée dans l'énoncé)

$$P_F(A) = \frac{3}{10}.$$

2. On cherche la probabilité  $P(F \cap A)$ . En utilisant la formule des probabilité composée

$$P(F \cap A) = P(F) \times P_F(A) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{10} = \frac{1}{5}.$$

3. On introduit en plus l'évènement  $G$ , "l'élève est un garçon". Les évènements  $(F, G)$  forment un système complet d'évènement, donc en utilisant la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(A) &= P(F) \times P_F(A) + P(G) \times P_G(A) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{3}{10} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} \\ &= \frac{1}{5} + \frac{2}{15} \\ &= \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

4. On tire maintenant au hasard un élève parmi ceux qui ont obtenus la moyenne. On cherche  $P_A(F)$ . En utilisant la formule de Bayes

$$\begin{aligned} P_A(F) &= \frac{P(A \cap F)}{P(A)} \\ &= \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

5. On a  $P(G) = \frac{1}{3}$ ,  $P(A) = \frac{1}{3}$  donc  $P(G) \times P(A) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ . On a également

$$P(A \cap G) = P(G) \times P_G(A) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$$

On a  $P(A \cap G) \neq P(A) \times P(G)$  donc

les évènements  $A$  et  $G$  ne sont pas indépendants.

### Exercice 19 (\*)

Une compagnie d'assurance répartit ses clients en trois classes  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_3$  : les bons risques, les risques moyens, et les mauvais risques. Les effectifs de ces trois classes représentent 20% de la population totale pour la classe  $R_1$ , 50% pour la classe  $R_2$ , et 30% pour la classe  $R_3$ . Les statistiques indiquent que les probabilités d'avoir un accident au cours de l'année pour une personne de l'une de ces trois classes sont respectivement de 0.05, 0.15 et 0.30.

1. On note  $A$  l'évènement "Avoir un accident dans l'année" et on cherche  $P(A)$ . Les évènements  $(R_1, R_2, R_3)$  forment un Système complet d'évènements. En utilisant la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned} P(A) &= P(R_1) \times P_{R_1}(A) + P(R_2) \times P_{R_2}(A) + P(R_3) \times P_{R_3}(A) \\ &= \frac{1}{5} \times \frac{5}{100} + \frac{1}{2} \times \frac{15}{100} + \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} \\ &= \frac{1}{100} + \frac{15}{200} + \frac{9}{100} \\ &= \frac{35}{200} = \frac{7}{40} \end{aligned}$$

2. On cherche la probabilité  $P_{\bar{A}}(R_1)$  à l'aide de la formule de Bayes

$$\begin{aligned}
 P_{\bar{A}}(R_1) &= \frac{P(R_1)}{P(\bar{A})} P_{R_1}(\bar{A}) \\
 &= \frac{1}{\frac{5}{33}} \times \frac{95}{100} \\
 &= \frac{1}{5} \times \frac{40}{33} \times \frac{95}{100} \\
 &= \frac{4 \times 19}{330} \\
 &= \frac{76}{330}
 \end{aligned}$$

### Exercice 20 (\*\*)

Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives. On note  $G_n$  l'évènement "Le joueur gagne la  $n$ -ième partie et  $p_n$  la probabilité de l'évènement  $G_n$ . On admet que  $p_1 = 0,1$ , que s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à  $0,8$ . S'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à  $0,6$ .

1. Le système  $(G_1, \bar{G}_1)$  est un système complet d'évènement. En utilisant la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
 P(G_2) &= P(G_1) \times P_{G_1}(G_2) + P(\bar{G}_1) \times P_{\bar{G}_1}(G_2) \\
 &= 0,1 \times 0,8 + 0,9 \times 0,6 \\
 &= 0,8 + 0,54 \\
 &= 0,62
 \end{aligned}$$

On conclut que  $p_2 = 0,62$ .

2. On cherche La probabilité  $P_{G_2}(G_1)$ . En utilisant la formule de Bayes, on a

$$\begin{aligned}
 P_{G_2}(G_1) &= \frac{P(\bar{G}_1)}{P(G_2)} \times P_{\bar{G}_1}(G_2) \\
 &= \frac{0,9}{0,62} \times 0,6 \\
 &= \frac{90 \times 6}{62 \times 10} \\
 &= \frac{9 \times 3 \times 2}{31 \times 2} \\
 &= \frac{27}{31}
 \end{aligned}$$

3. Soit  $n$  un entier naturel non nul, on considère le système complet d'évènement  $(G_n, \bar{G}_n)$  et on applique la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
 p_{n+1} &= P(G_{n+1}) = P(G_n) \times P_{G_n}(G_{n+1}) + P(\bar{G}_n) \times P_{\bar{G}_n}(G_{n+1}) \\
 &= p_n \times 0,8 + (1 - p_n) \times 0,6 \\
 &= 0,2p_n + 0,6
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a donc bien } p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}.$$

4. On reconnaît que la suite  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite arithmético-géométrique de premier terme  $p_1 = \frac{1}{10}$ .

On résout l'équation  $x = \frac{1}{5}x + \frac{3}{5}$

$$x = \frac{1}{5}x + \frac{3}{5} \iff \frac{4}{5}x = \frac{3}{5} \iff x = \frac{3}{4}$$

On pose alors la suite  $(v_n)$  définie par  $v_n = p_n - \frac{3}{4}$ . On vérifie que la suite  $(v_n)$  est géométrique. En effet

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{3}{4} \\ &= \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5} - \frac{3}{4} \\ &= \frac{1}{5}\left(v_n + \frac{3}{4}\right) + \frac{12}{20} - \frac{15}{20} \\ &= \frac{1}{5}v_n + \frac{3}{20} - \frac{3}{20} \\ &= \frac{1}{5}v_n \end{aligned}$$

La suite  $(v_n)$  est donc géométrique de raison  $\frac{1}{5}$ . De plus  $v_1 = p_1 - \frac{3}{4} = \frac{2}{20} - \frac{15}{20} = -\frac{13}{20}$ . Nous avons donc pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $v_n = -\frac{13}{20} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$ . On en déduit donc que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{20} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}.$$

### Exercice 21 (\*\*\*) Le jeu des portes

On dépose au hasard un cadeau derrière l'une d'entre trois portes. Un jeu consiste à trouver ce cadeau en deux étapes. D'abord vous choisissez une porte ; puis l'organisateur vous montre parmi les deux portes restantes, une porte derrière laquelle le cadeau ne se trouve pas. Vous avez alors la possibilité entre changer de choix où le garder : que faites-vous ?